Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»
Кафедра полупроводниковых приборов и микроэлектроники

Паспорт
расчетно-графического задания (работы)

по дисциплине «Квантовая механика и статистическая физика», 5 семестр

1. Методика оценки

Выполнение расчетно-графического задания (работы) (далее - РГЗ(Р)) является формой текущей аттестации (контроля) по дисциплине, предусмотренной учебным планом.

В рамках расчетно-графического задания (работы) по дисциплине студенты должны рассчитать параметры системы в соответствии с исходными данными.

При выполнении расчетно-графического задания (работы) студенты должны провести анализ объекта, выбрать параметры, обосновать метод решения, провести вычисления, понять физический смысл результата, оценить погрешность.

Обязательные структурные части РГЗ: Введение, расчетная часть, заключение.

Оцениваемые позиции: правильность выбора основных характеристик объекта, количественных вычислений, физических выводов.

РГЗ(Р) выполняется индивидуально.

2. Уровни сформированности компетенций и критерии оценки

РГЗ(Р) считается выполненной **на продвинутом** уровне, если все необходимые расчеты произведены самостоятельно и без ошибок; все разделы РГЗ(Р) выполнены правильно и в полном объеме; работа оформлена в соответствии с требованиями; сдана преподавателю в указанные сроки и не возвращалась для доработки; даны полные и развернутые выводы и рекомендации; на защите студентом даны уверенные и аргументированные ответы, что свидетельствует об уровне сформированности компетенций и соотнесенных с ними индикаторов на продвинутом уровне. Оценка составляет *от 18 до 20 баллов.*

РГЗ(Р) считается выполненной **на базовом** уровне, если все необходимые расчеты произведены самостоятельно и без существенных ошибок; все разделы РГЗ(Р) выполнены правильно, но есть замечания к полноте предоставления информации; работа оформлена в соответствии с требованиями; сдана преподавателю в указанные сроки и однократно возвращалась студенту для незначительной доработки; в заключении даны выводы и рекомендации; на защите студентом допущены непринципиальные ошибки, что свидетельствует об уровне сформированности компетенций и соотнесенных с ними индикаторов на базовом уровне. Оценка составляет *от 13 до 17 баллов.*

РГЗ(Р) считается выполненной **на пороговом** уровне, если все необходимые расчеты произведены самостоятельно, но с ошибками, часть из которых носит принципиальный характер; есть замечания к полноте предоставления информации; работа оформлена в соответствии с требованиями; сдана преподавателю, но неоднократно возвращалась студенту для доработки; в заключении даны краткие выводы; защита РГЗ(Р) вызывает у студента серьезные затруднения, что свидетельствует об уровне сформированности компетенций и соотнесенных с ними индикаторов на пороговом уровне. Оценка составляет *от 10 до 12 баллов.*

РГЗ(Р) считается **не выполненной**, если расчеты произведены с серьезными ошибками; есть замечания к полноте предоставления информации и оформлению; РГЗ(Р) была сдана преподавателю, но неоднократно возвращалась студенту для доработки, что не привело к улучшению ее качества; РГЗ(Р) не допущена до защиты, что свидетельствует об не сформированности компетенций и соотнесенных с ними индикаторов. Оценка составляет *менее 10 баллов*.

3. Шкала оценки

В общей оценке по дисциплине баллы за РГЗ(Р) учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, приведенными в рабочей программе дисциплины.

РГЗ(Р) как форма текущей аттестации (контроля) по дисциплине считается успешно выполненной, если сумма полученных баллов по всем его заданиям составляет от 10 до 20 баллов включительно.

4. Примерный перечень заданий РГЗ(Р)

РГЗ 1

1.1. Доказать, что если $\hat{A}\psi_a = a\psi_a$, то $(\hat{A})^n\psi_a = a^n\psi_a$ и $f(\hat{A})\psi_a = f(a)\psi_a$, где $f(a)$ разлагается в ряд Маклорена.

1.2. Доказать, что для оператора радиального импульса $\hat{p}_r = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)$ собственные функции $\psi_{\pm p}(r) = \frac{c}{r}\exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}pr\right)$.

1.3. Доказать эрмитовость оператора кинетической энергии $\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\mu(x)}\frac{d}{dx}\right]$ и неэрмитовость $\hat{A} = \frac{1}{\mu(x)}\frac{d^2}{dx^2}$, где $\mu(x)$ – эффективная масса.

1.4. Доказать эрмитовость оператора проекции момента импульса $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\varphi}$ в пространстве периодических функций $\psi_k(\varphi + 2\pi) = \psi_k(\varphi)$.

1.5. Доказать $\left(\frac{d}{dx} + \frac{a}{x}\right)^+ = \left(-\frac{d}{dx} + \frac{a^*}{x}\right)$, $\left(\frac{d}{dx} + \frac{a}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} - \frac{a}{x}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{a(1-a)}{x^2}$.

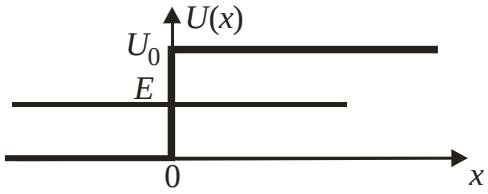
Доказать, что если $[\hat{n}_-, \hat{n}_+] = 1$, то $[\hat{n}_-, (\hat{n}_+)^m] = m(\hat{n}_+)^{m-1}$, $[(\hat{n}_-)^m, \hat{n}_+] = m(\hat{n}_-)^{m-1}$.

1.6. Доказать $\hat{p}_x x = x\hat{p}_x + \frac{\hbar}{i}$, $[\hat{p}_x, x^n] = \frac{\hbar}{i}n x^{n-1}$, $[\hat{p}_x^n, x] = \frac{\hbar}{i}n\hat{p}_x^{n-1}$,

$[\hat{H}, x] = \frac{\hbar}{i\mu}\hat{p}_x$.

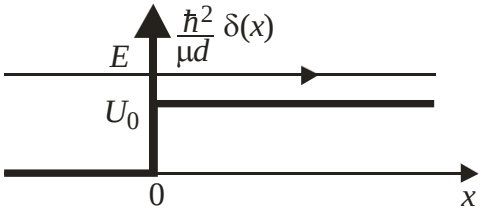
РГЗ 2

2.1. На потенциальный барьер с единичной амплитудой падает частица с энергией $E < U_0$. Найти вероятность обнаружения частицы при $x > 0$.

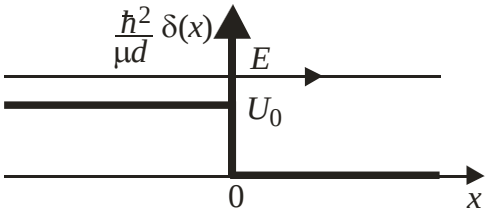


2.2. Найти фазу отраженной волны в задаче 2.1. Рассмотреть случаи $U_0 \to 0$ и $U_0 \to \infty$.

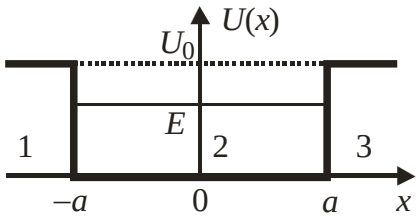
2.3. Найти амплитуды отраженной и проходящей волн.



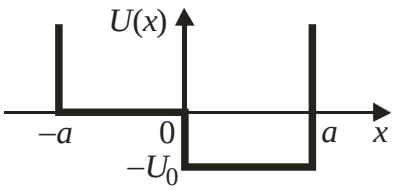
2.4. Найти амплитуды отраженной и проходящей волн.



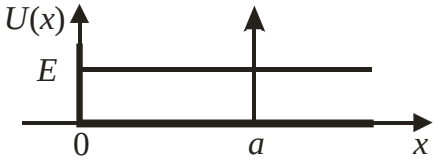
2.5. Частица с энергией $E = 3U_0/4$ находится в потенциальной яме. Найти волновые функции в областях 1, 2, 3.



2.6. Получить функции состояний и уравнение для энергии частицы $E > 0$ и $-U_0 < E < 0$ в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Рассмотреть пределы $U_0 \to 0$, $U_0 \to \infty$.



2.7. Для системы с потенциальной энергией $U(x)=\begin{cases}\infty, & x<0,\\ \dfrac{\hbar^2}{\mu d}\delta(x-a), & x>0\end{cases}$ доказать, что отсутствие волны, падающей на систему, дает условие $e^{2ika}=1-ikd$, где $k=\sqrt{2\mu E}/\hbar$. Найти уровни энергии для сильного барьера $kd<<1$.



РГЗ 3

3.1. Доказать, что для одномерной частицы с энергией $\varepsilon=a\,|\,p\,|^n$ на отрезке длиной L плотность состояний $g(\varepsilon,n)=\dfrac{N_S}{h}\dfrac{2L}{n a^{1/n}}\varepsilon^{(1-n)/n}$.

3.2. Доказать, что для двухмерной частицы с энергией $\varepsilon=a\,|\,p\,|^n$ на площади S плотность состояний $g(\varepsilon,n)=\dfrac{N_S}{h^2}\dfrac{2\pi S}{n a^{2/n}}\varepsilon^{(2-n)/n}$.

3.3. Доказать, что для трехмерной частицы с энергией $\varepsilon=a\,|\,p\,|^n$ в объеме V плотность состояний $g(\varepsilon,n)=\dfrac{N_S}{h^3}\dfrac{4\pi V}{n a^{3/n}}\varepsilon^{(3-n)/n}$.

3.4. Доказать, что для двухмерной частицы с энергией $\varepsilon=p^2/2m+u(\mathbf{r})$, где $u(\mathbf{r})=q_1|\,x\,|^a+q_2|\,y\,|^b$, плотность состояний
$g(\varepsilon,a,b)=\dfrac{8\pi N_S m}{h^2 q_1^{1/a} q_2^{1/b}}\dfrac{\Gamma(1/a)\,\Gamma(1/b)}{ab\,\Gamma(1+\eta)}\varepsilon^{\eta}$, где $\eta=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

3.5. В одномерной цепочке из N атомов, находящихся на расстоянии d друг от друга, энергия, частота и импульс фонона связаны соотношением $\varepsilon=\hbar\omega=v\,p$, где v – скорость продольной акустической волны. Доказать, что частотная плотность состояний $g=Nd/(\pi v)$ и частота Дебая $\omega_{\mathrm{D}}=\pi v/d$.

3.6. В двухмерной решетке площадью S, содержащей N атомов, энергия, частота и импульс фонона связаны соотношением $\varepsilon=\hbar\omega=v_i\,p_i$, где $i=1,2$ – продольная, поперечная поляризации. Доказать, что плотность состояний $g(\omega)=S\omega/(\pi v^2)$, где $v^{-2}\equiv(v_1^{-2}+v_2^{-2})/2$, и частота Дебая $\omega_{\mathrm{D}}=2v\sqrt{\pi N/S}$.

3.7. Газ состоит из линейных гармонических осцилляторов с частотой ω при температуре T. Используя каноническое распределение доказать, что среднее число квантов

энергии $\overline{n} \equiv \sum_n n\, w_n = \dfrac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$. Учесть $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, $g_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

3.8. Газ состоит из линейных гармонических осцилляторов с частотой ω при температуре *T*. Используя каноническое распределение, для среднего квадратичного импульса доказать $\overline{p^2} \equiv \sum_n \overline{(p^2)_n}\, w_n = \dfrac{1}{2}\hbar\omega m \dfrac{e^a + 1}{e^a - 1}$, где $a = \dfrac{\hbar\omega}{kT}$. Учесть $\overline{(p^2)_n} = \hbar\omega m(n + 1/2)$, $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, $g_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

3.9. Газ состоит из линейных гармонических осцилляторов с частотой ω при температуре *T*. Используя каноническое распределение, для среднего квадратичного смещения осциллятора доказать $\overline{x^2} \equiv \sum_n \overline{(x^2)_n}\, w_n = \dfrac{1}{2} x_0^2 \dfrac{e^a + 1}{e^a - 1}$, где $x_0^2 = \dfrac{\hbar}{m\omega}$, $a = \dfrac{\hbar\omega}{kT}$. Учесть $\overline{(x^2)_n} = x_0^2(n + 1/2)$, $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, $g_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

3.10. Газ состоит из линейных гармонических осцилляторов с частотой ω при температуре *T*. Используя каноническое распределение, для средней энергии осциллятора доказать $\overline{\varepsilon} \equiv \sum_n \varepsilon_n\, w_n = \hbar\omega\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{e^a - 1}\right)$, где $a = \dfrac{\hbar\omega}{kT}$. Учесть $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, $g_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Темы коллоквиума

1. Собственные функции и собственные значения оператора. Эрмитовый оператор. Ортонормированность дискретного и непрерывного спектров. Операторы координаты и импульса, их собственные функции. Соотношение неопределенностей.
2. Плотность вероятности. Плотность тока вероятности. Уравнение непрерывности вероятности. Применение к состоянию «плоская волна».
3. Уравнение Шредингера для нестационарного и стационарного состояний. Уравнение и решение для частицы в потенциальной яме.
4. Спин электрона. Операторы, собственные функции, собственные значения. Принцип Паули для фермионов и его обоснование.
5. Плотность состояний электрона. Применение к трехмерному газу.
6. Распределение Ферми–Дирака по состояниям и по энергии. Электронный газ в металле и в полупроводнике. Химический потенциал, энергия Ферми.
7. Распределение Бозе–Эйнштейна по состояниям. Химический потенциал. Фононный газ. Характеристики фонона. Распределение фононов по частоте. Частота и температура Дебая.